Воркшоп по математическому моделированию и дифференциальным уравнениям,
посвященный 70-летнему юбилею д.ф.-м.н., профессора А.О. ВАТУЛЬЯНА
22-24 ноября 2023 г.

О некоторых аспектах моделирования и идентификации распределений предварительных напряжений в цилиндрах и пластинах

Р.Д. Недин

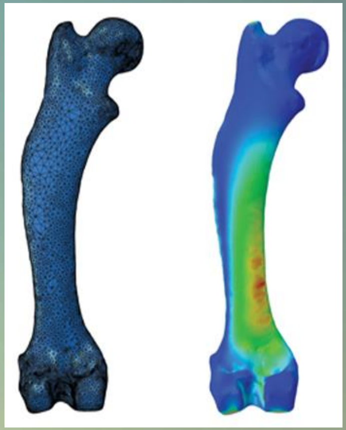
ИММиКН им. И.И. Воровича ЮФУ, ЮМИ ВНЦ РАН

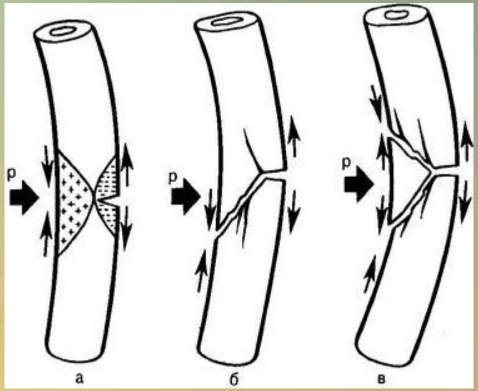
Научная школа А.О. Ватульяна

Образование предварительных напряжений (ПН)

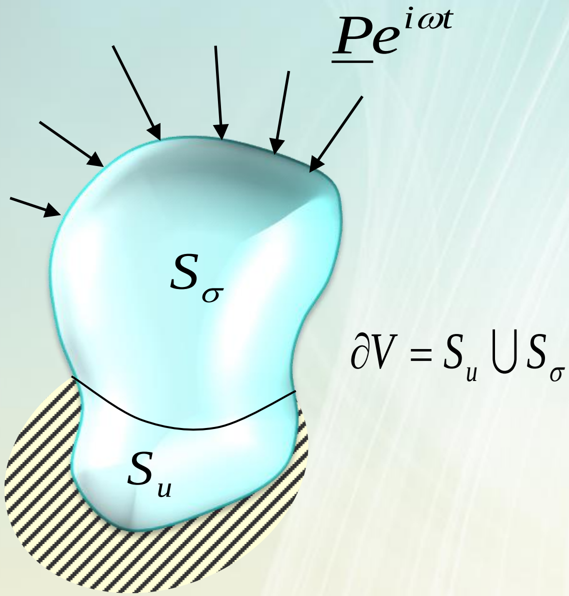
В инженерных конструкциях…

В биологических структурах…





Модель колебаний упругого преднапряженного тела



Равновесие начального состояния:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 = 0 \\ \mathbf{u}_0\big|_{S_u} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_0\big|_{S_\sigma} = \mathbf{P}_0 \end{cases} \qquad (1)$$

Наложение малых колебаний:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (\nabla \mathbf{u}_0 \approx 0) \\ \mathbf{u}\big|_{S_u} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}\big|_{S_\sigma} = \mathbf{P} \end{cases} \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{C} : \mathbf{e}_0, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right)$$

Обзор других моделей:

R. Nedin, V. Dudarev, A. Vatulyan // Engineering Structures ***151*** *(2017) 391-405*

Модель колебаний упругого преднапряженного тела

Вариационный принцип:

$$\delta\Lambda = 0, \quad \Lambda = \Pi + \Pi_0 - \omega^2 K \tag{3}$$

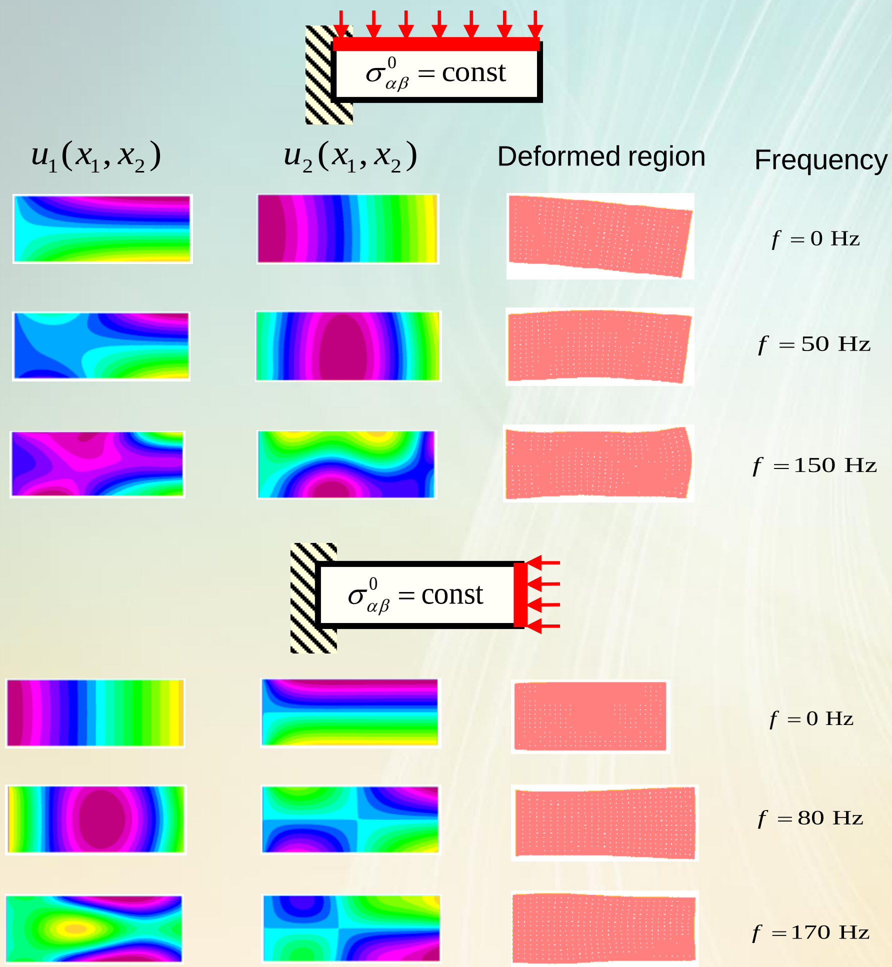
$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}\,dV - \int_{S_\sigma} \mathbf{P}\cdot\mathbf{u}\,dS, \quad \Pi_0 = \frac{1}{2}\int_V \left(\boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \nabla\mathbf{u}\right) : \nabla\mathbf{u}\,dV, \quad K = \frac{1}{2}\int_V \rho\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\,dV$$

Слабая постановка:

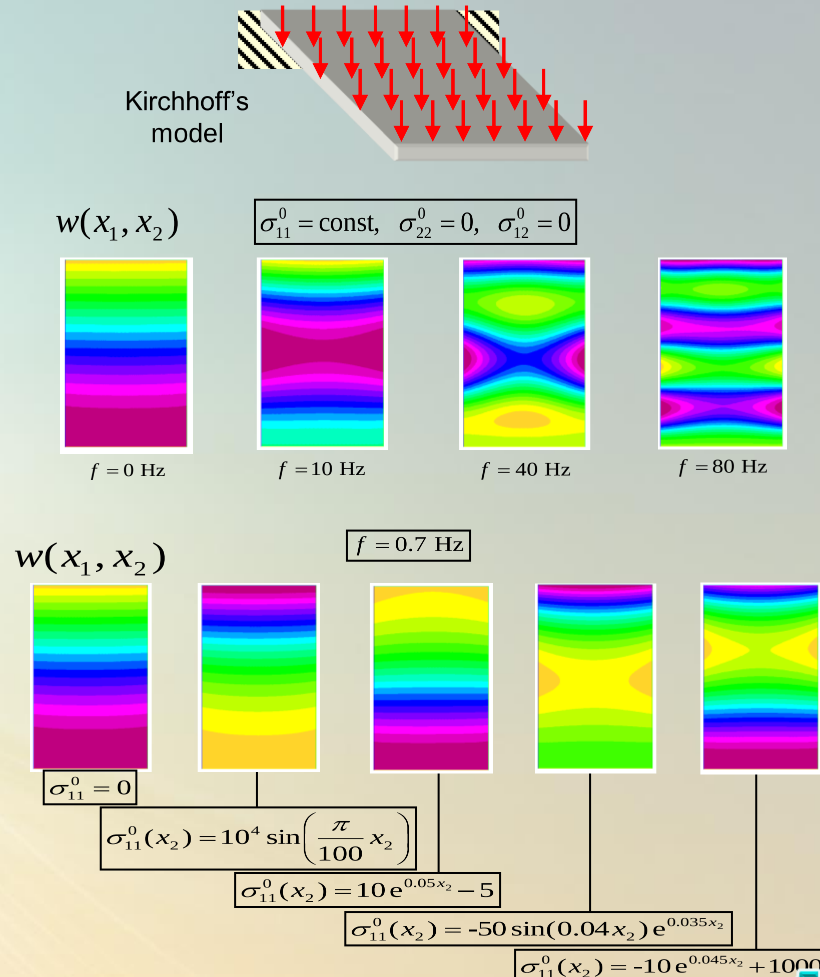
$$\int_V \boldsymbol{\sigma} : \nabla\mathbf{v}\,dV + \int_V \left(\boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \nabla\mathbf{u}\right) : \nabla\mathbf{v}\,dV - \omega^2 \int_V \rho\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\,dV - \int_{S_\sigma} \mathbf{P}\cdot\mathbf{v}\,dS = 0 \tag{4}$$

$$\mathbf{u}\big|_{S_u} = 0, \quad \mathbf{v}\big|_{S_u} = 0$$

Планарные колебания пластин



Изгибные колебания пластин

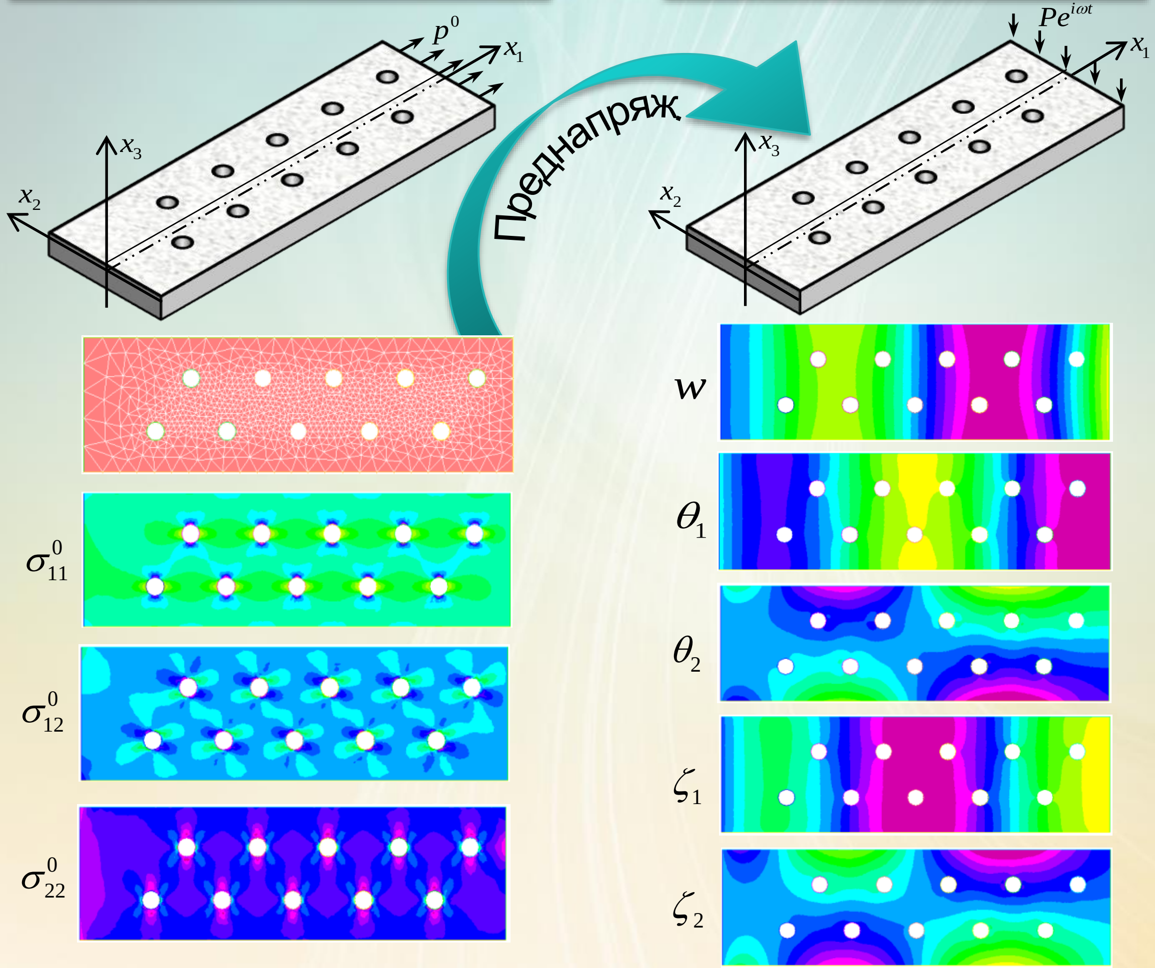


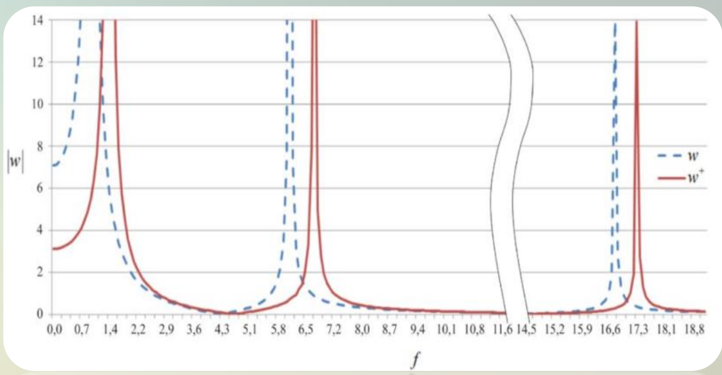
Подход к моделированию колебаний начально напряженных тел

Этап 1: описание полей ПН (решение задачи статики)

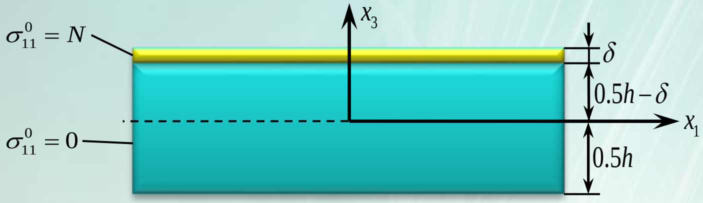
Этап 2: установившийся режим колебаний

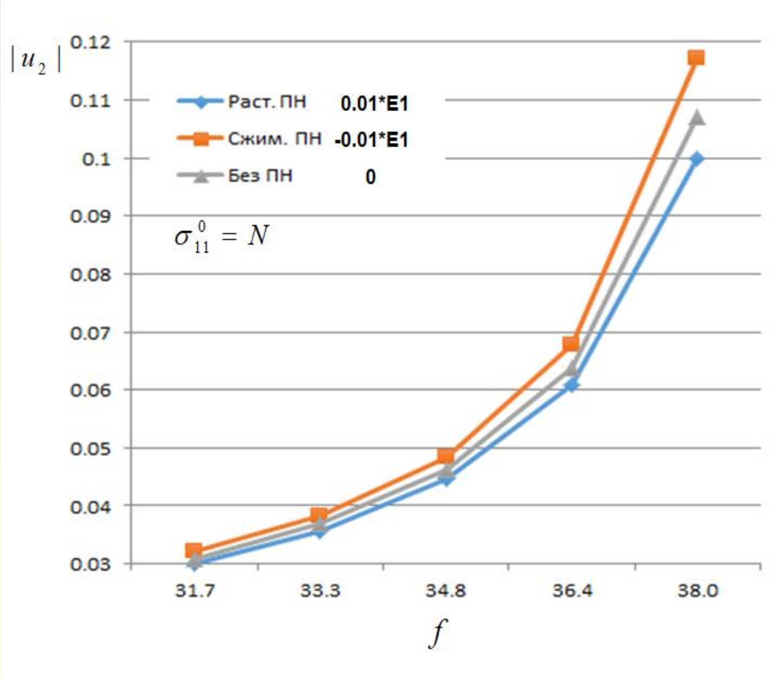
Анализ влияния параметров ПНС пластин с отверстиями на АЧХ

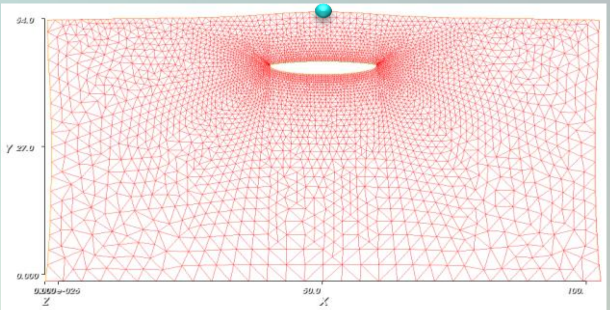


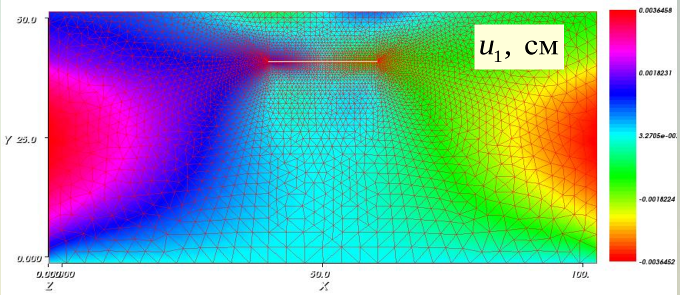


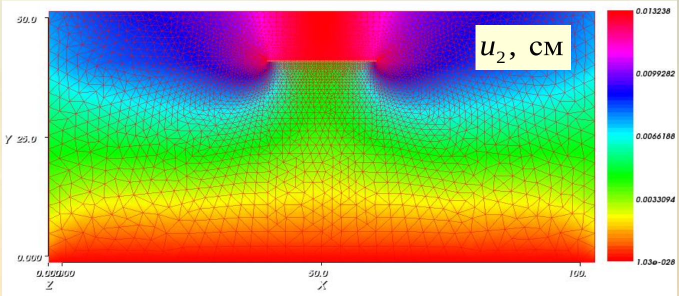
Колебания полосы с покрытием и зоной отслоения



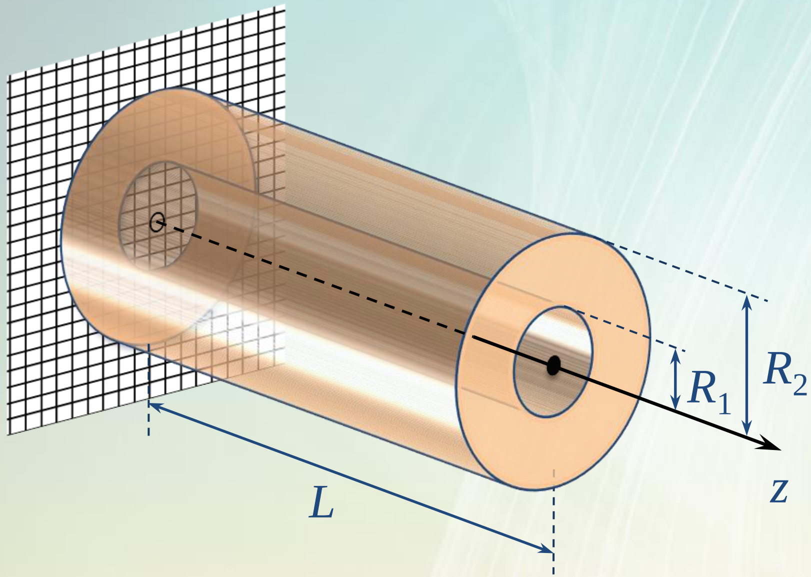








Осесимметричные колебания цилиндра с остаточными напряжениями



$$V = \{ r \in [R_1, R_2], \phi \in [0, 2\pi], z \in [0, L] \}$$

$$\mathbf{u} = u_r(r,z)\mathbf{e}_r + u_\phi(r,z)\mathbf{e}_\phi + u_z(r,z)\mathbf{e}_z \qquad (9)$$

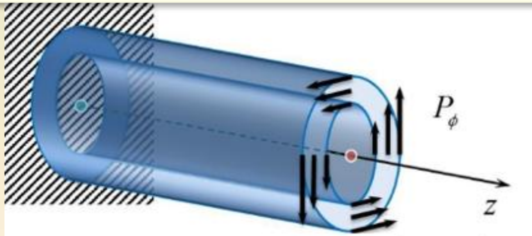
Ост. напряжения

$$\sigma^0_{rr}, \sigma^0_{\phi\phi}, \sigma^0_{zz}, \sigma^0_{r\phi}, \sigma^0_{rz}, \sigma^0_{\phi z} \quad (r, z) \qquad (10)$$

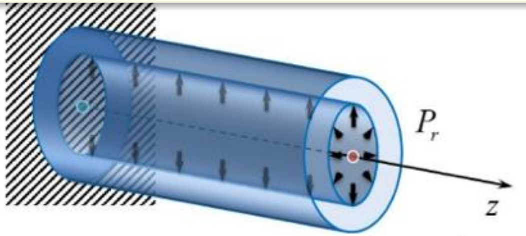
Неоднородный изотропный материал

$$\lambda = \lambda(r,z), \;\; \mu = \mu(r,z) \qquad (11)$$

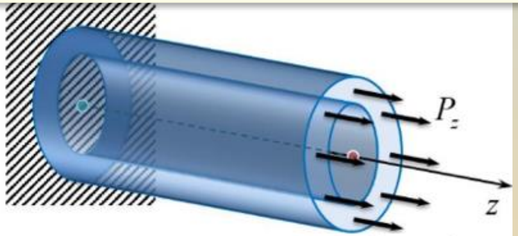
Зондирующее нагружение



$P_r = 0,\ P_\phi = \tau r / R_2,\ P_z = 0\ (z = L)$



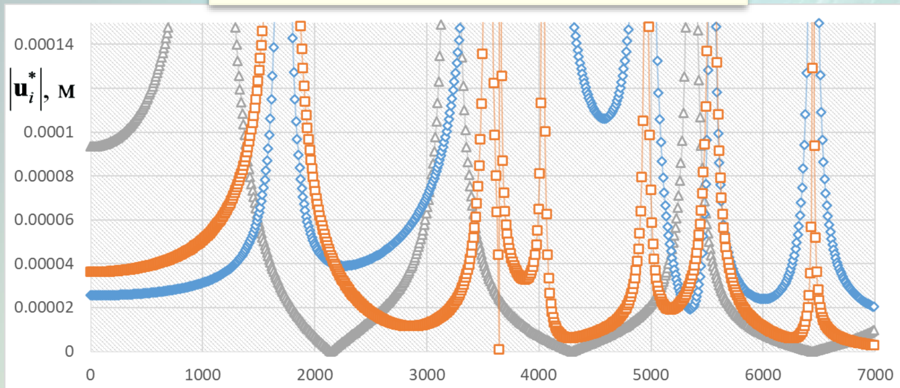
$P_r = \tau,\ P_\phi = 0,\ P_z = 0\ (r = R_1)$

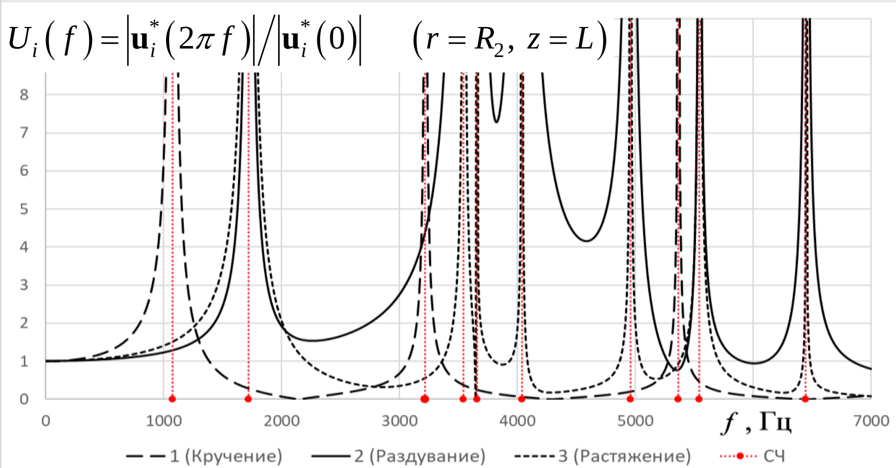


$P_r = 0,\ P_\phi = 0,\ P_z = \tau\ (z = L)$

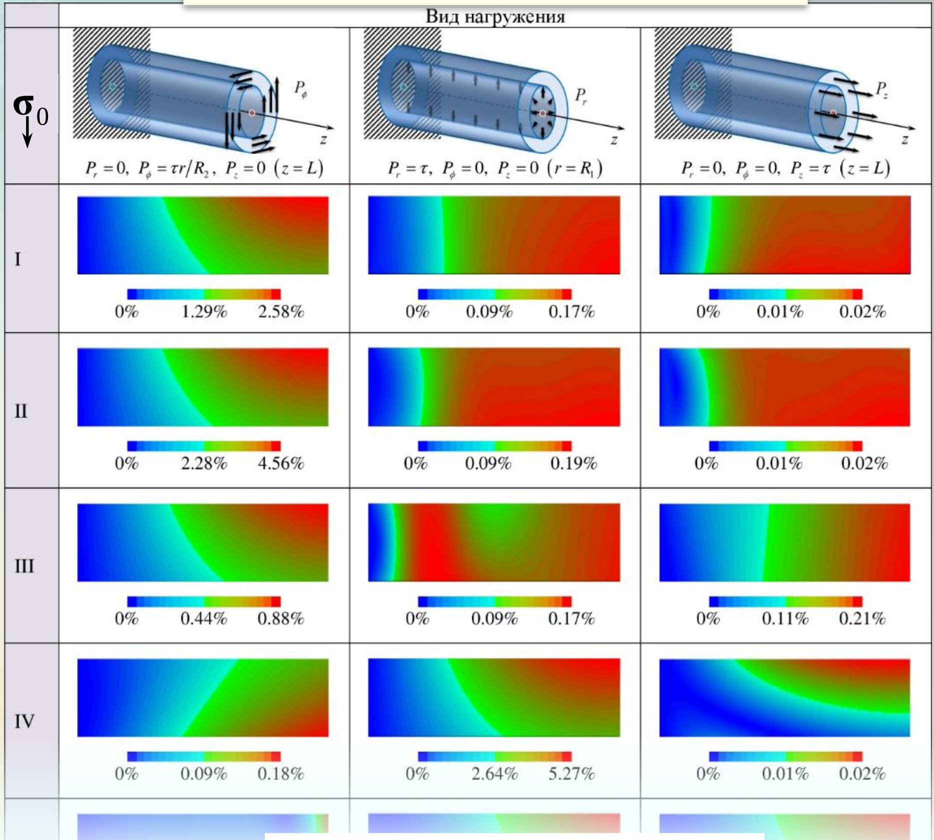
Осесимметричные колебания цилиндра с остаточными напряжениями

Чувствительность АЧХ к $\boldsymbol{\sigma}_0$





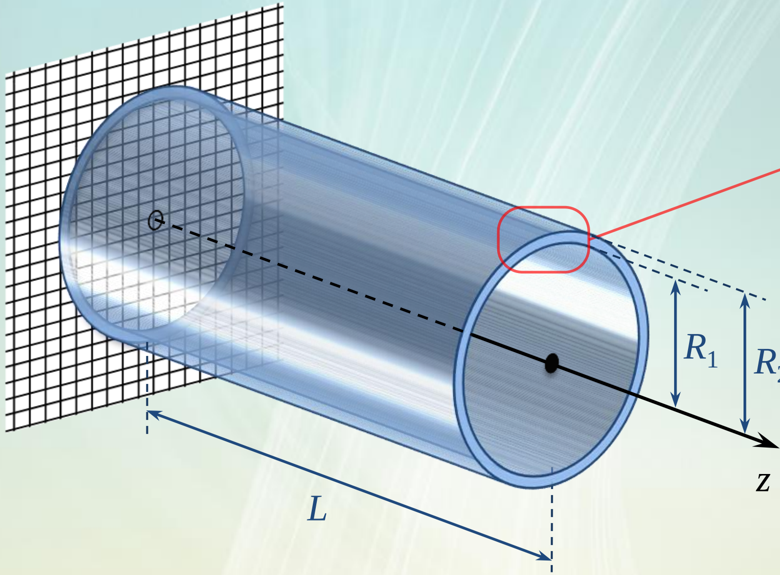
Чувствительность полей $\mathbf{u}$ к $\boldsymbol{\sigma}_0$



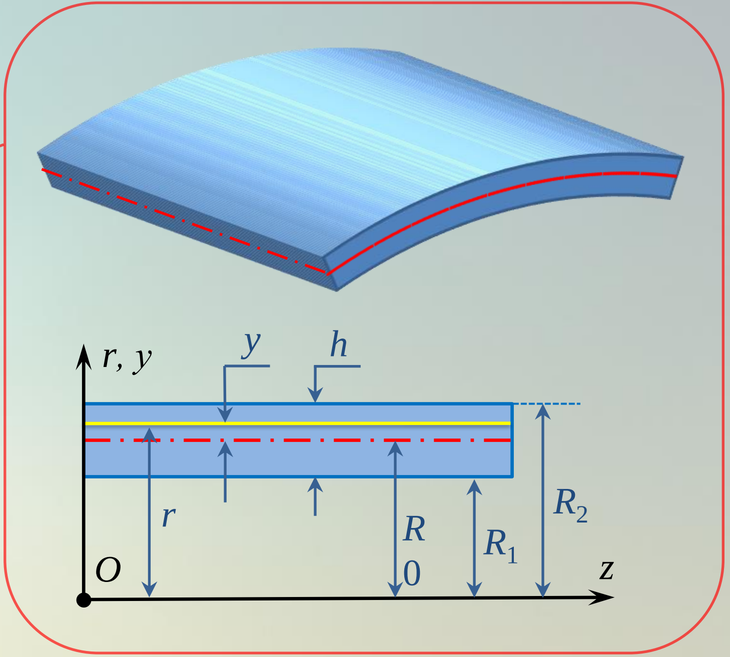
$$\delta_i(r,z) = \frac{|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^*|}{d_i} \cdot 100\%, \quad d_i = \max_{r,z} |\mathbf{u}_i^*|$$

Недин Р.Д., Юров В.О. // Вестник ПНИПУ. Механика ***1*** *(2023)*

Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки



$$V = \{r \in [R_1, R_2], \phi \in [0, 2\pi), z \in [0, L]\}$$



$$h = R_2 - R_1, \quad R_0 = (R_2 + R_1)/2, \quad y = r - R_0$$

Гипотезы (6)

$$u_r = w, \quad u_\phi = 0, \quad u_z = u - y w_{,z}$$

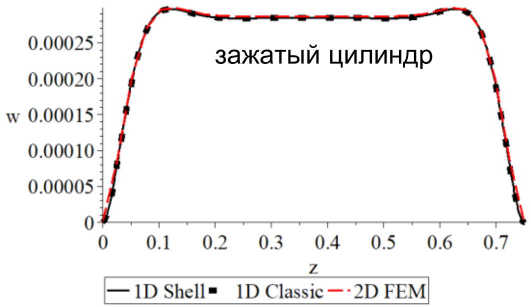
$$E, \ \nu \quad (y, z)$$

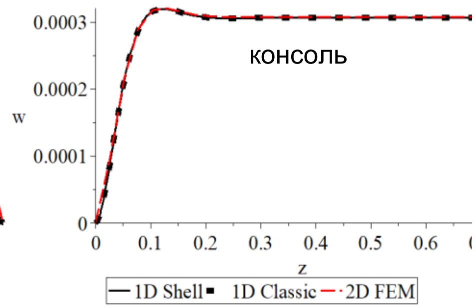
Ост. напряжения (7)

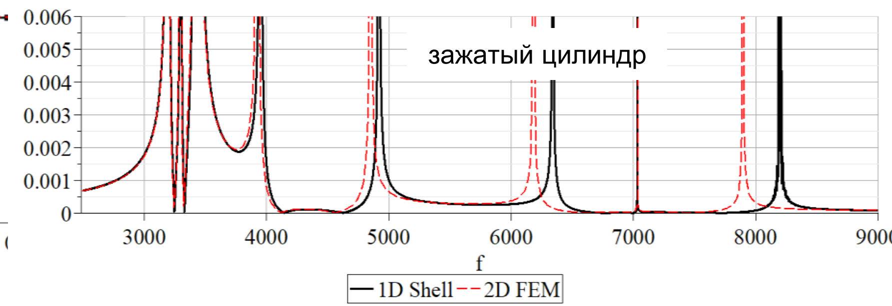
$$\sigma_\phi^0, \ \sigma_z^0 \quad (y, z)$$

Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки

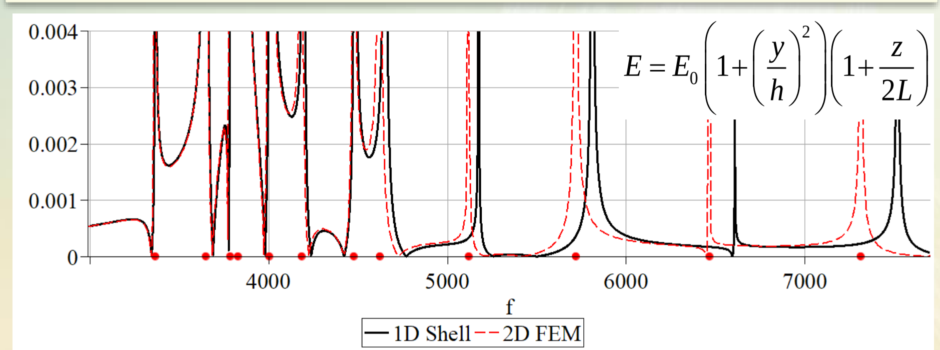
Сравнение с классическим (1D) и МКЭ (2D) решениями





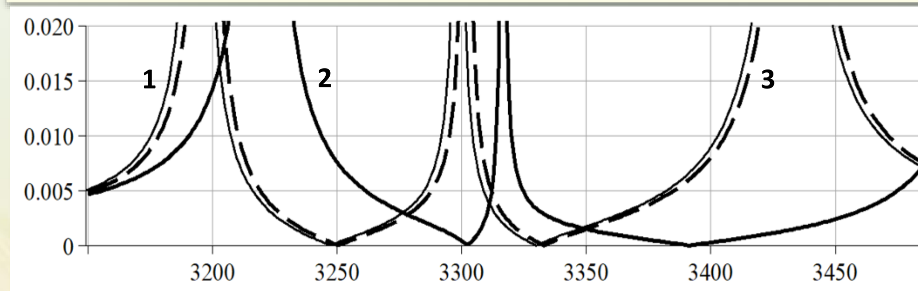


АЧХ для функционально-градиентного материала



$$E = E_0\left(1+\left(\frac{y}{h}\right)^2\right)\left(1+\frac{z}{2L}\right)$$

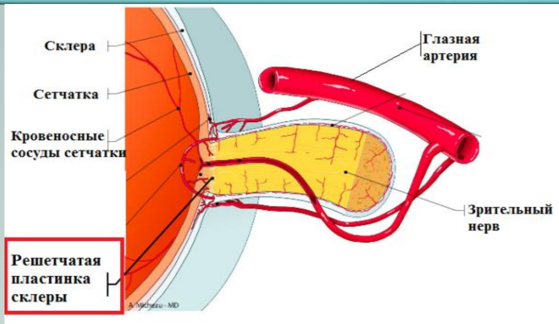
Влияние ост. напряжений σ_0 на АЧХ

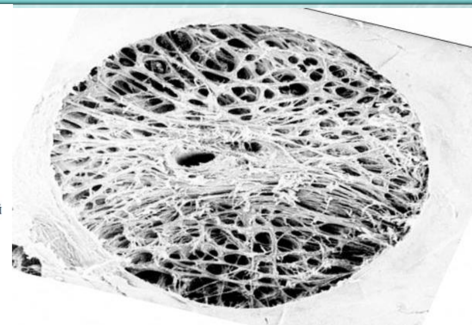


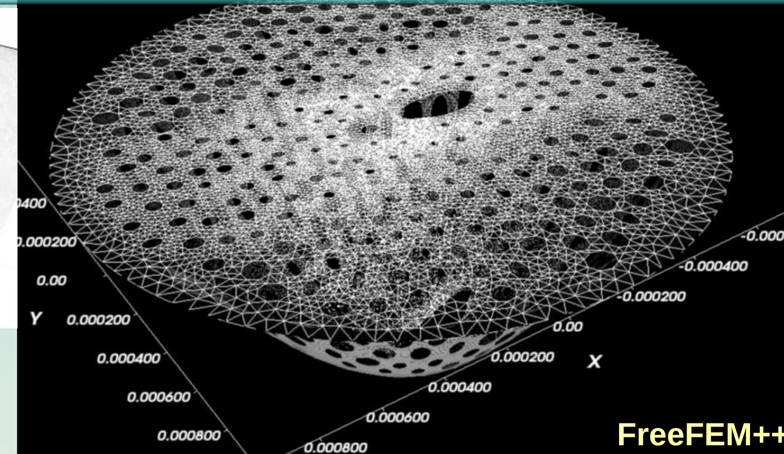
Без ост. напр. (**1**) Осевое растяжение (**2**) Раздувание (**3**)

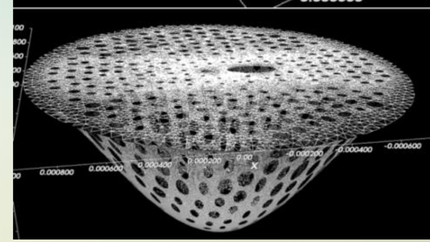
А.О. Ватульян, Р.Д. Недин, В.О. Юров // Проблемы прочности и пластичности ***85*** *(2023)*

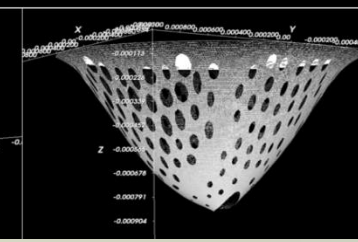
Решетчатая пластинка склеры глаза (lamina cribrosa)











R = 1 мм = 1000 μм,   h = 0.25 мм = 250 μм

H = h / 1.6 поправка на снижение жесткости вдоль толщины

E = 1.43 МПа,   ν = 0.45,   ρ = 1060 кг/м³

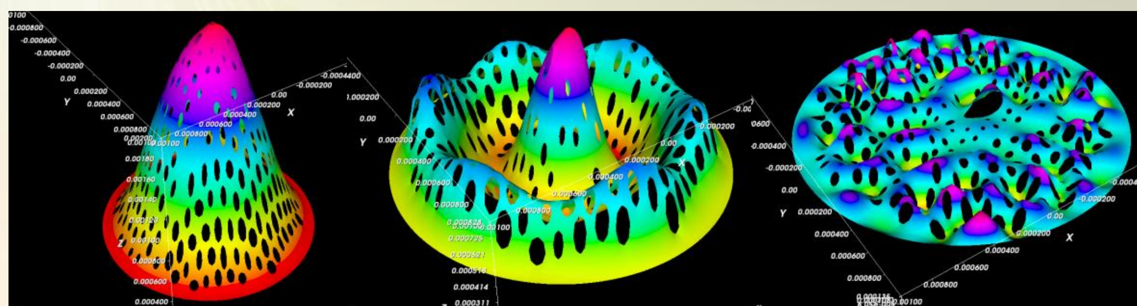
начальный прогиб

$w_0(x_1, x_2)$

p0 = 15 мм. рт. ст. – норм. ВГД;   w0 = 43 μм

p0 = 35 мм. рт. ст. – повыш. ВГД; w0 = 100 μм

$w(x_1, x_2)$ *f* = 4 kHz   *f* = 23 kHz   *f* = 80 kHz



Расчетные значения взяты из литературы:

- *Краковская Е.В* // Российский журнал биомеханики **12**(2) 2008
- *Бауэр С.М., Воронкова Е.Б.* // Вестник СПбГУ. Сер.1. **1**(59) 2014

Постановки обратных задач (ОЗ)

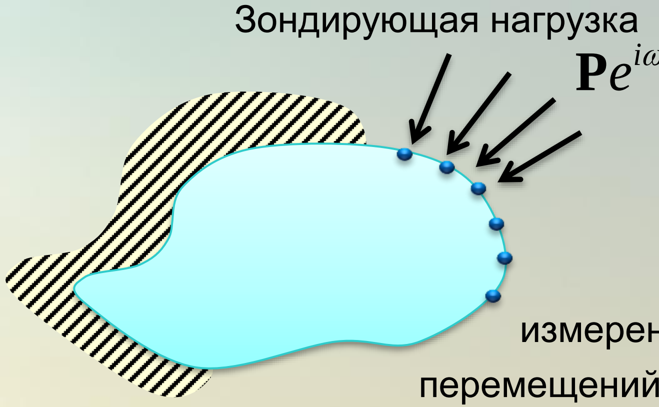
ОЗ 1-го типа

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega_0), \quad \mathbf{x} \in V$$

Измерение перемещений $\mathbf{u}$ всюду в области

ОЗ 2-го типа

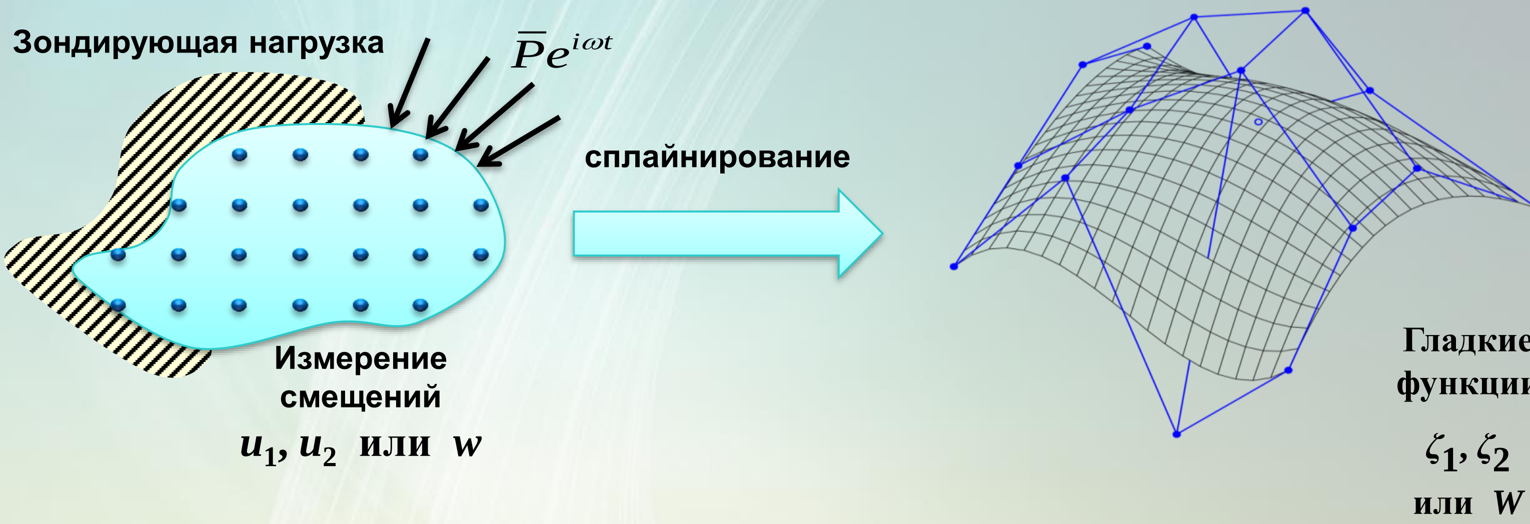
$$\mathbf{u}\big|_{S_\sigma} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]$$



измерение перемещений $\mathbf{u}$ на части границы

$$\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{x}) \quad - \quad ?$$

ОЗ 1-го типа для плоской области

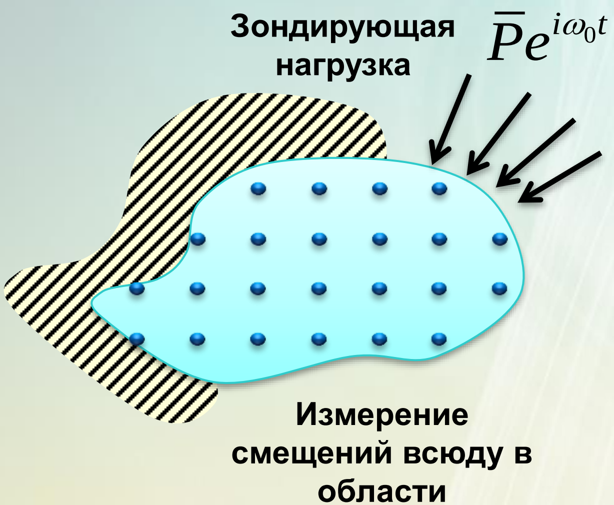


Цель: идентифицировать поля ПН $\sigma^0_{\alpha\beta}(x)$

$$\sigma^0_{11,1} + \sigma^0_{12,2} = 0$$
$$\sigma^0_{12,1} + \sigma^0_{22,2} = 0 \qquad (5)$$

О единственности восстановления 2D ПН

ОЗ 1-го типа



Дополнительная информация:

$$u_i\big|_S = f_i(x,\omega_0)$$

$$\sigma_{11}^0(x_1,x_2),\ \sigma_{12}^0(x_1,x_2),\ \sigma_{22}^0(x_1,x_2)\quad (\sigma_{ij,j}^0=0,\quad i,j=1,2)$$

$$\begin{cases}\left(\sigma_{ij}+u_{i,k}\sigma_{kj}^0\right)_{,j}+\rho\omega^2u_i=0\\ \sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}u_{k,k}+\mu\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)\\ \left(\sigma_{ij}+u_{i,k}\sigma_{kj}^0\right)n_j\big|_{S_\sigma}=P_i\\ u_i\big|_{S_u}=0,\quad i,j,k=1,2\end{cases}\qquad(6)$$

Лемма. Пусть сущ. 2 решения $\sigma_{ij}^{0(1)},\ \sigma_{ij}^{0(2)};\quad d_{ij}^0=\sigma_{ij}^{0(1)}-\sigma_{ij}^{0(2)}$

Тогда $u_{i,kj}d_{kj}^0=0,\ \ u_{i,k}d_{kj}^0n_j\big|_{l_\sigma}=0$ или

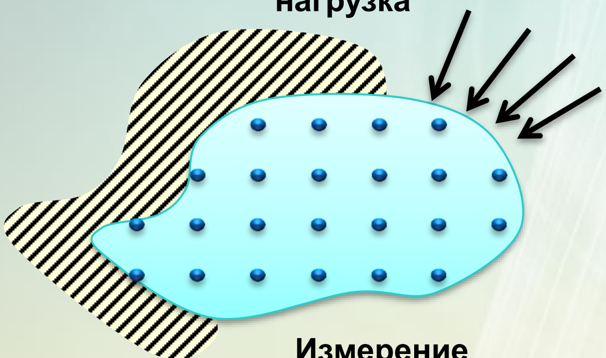
$$\begin{cases}u_{1,11}d_{11}^0+2u_{1,12}d_{12}^0+u_{1,22}d_{22}^0=0\\ u_{2,11}d_{11}^0+2u_{2,12}d_{12}^0+u_{2,22}d_{22}^0=0\end{cases}\qquad(7)$$

– система 2 линейных уравнений для 3 компонент

О единственности восстановления 2D ПН

ОЗ 1-го типа

Зондирующая нагрузка $\overline{P}e^{i\omega_0 t}$



Измерение смещений всюду в области

Дополнительная информация:

$$u_i\big|_S = f_i(x,\omega_0)$$

Рассмотрим 2 случая:

Случай 1: Одна из компонент ПН σ_{ij}^0 равна 0,

н-р, $\sigma_{12}^0 = 0, \quad d_{12}^0 = 0$

$$\begin{cases} u_{1,11}d_{11}^0 + u_{1,22}d_{22}^0 = 0 \\ u_{2,11}d_{11}^0 + u_{2,22}d_{22}^0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad \text{(s1)}$$

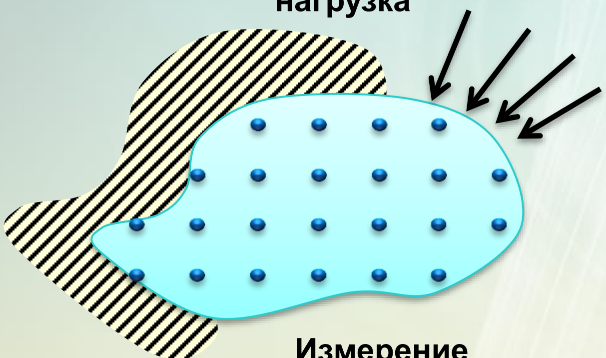
$$\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} u_{1,11} & u_{1,22} \\ u_{2,11} & u_{2,22} \end{vmatrix} = u_{1,11}u_{2,22} - u_{1,22}u_{2,11} \neq 0 \qquad \text{(s2)}$$

(условие существования единственного нулевого решения однородной СЛАУ)

$\Rightarrow d_{11}^0 = d_{22}^0 = 0 \Rightarrow$ единственность решения ОЗ установлена

ОЗ 1-го типа

Зондирующая нагрузка $\overline{P}e^{i\omega_0 t}$



Измерение смещений всюду в области

Дополнительная информация:

$$u_i\big|_S = f_i(x,\omega_0)$$

Случай 2: ПН общего вида:

$$\begin{cases} u_{1,11}d_{11}^0 + 2u_{1,12}d_{12}^0 + u_{1,22}d_{22}^0 = 0 \\ u_{2,11}d_{11}^0 + 2u_{2,12}d_{12}^0 + u_{2,22}d_{22}^0 = 0 \end{cases} \Rightarrow d_{11}^0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}d_{12}^0, \quad d_{22}^0 = \frac{\Delta_2}{\Delta}d_{12}^0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2u_{1,12} & u_{1,22} \\ -2u_{2,12} & u_{2,22} \end{vmatrix} = 2\left(u_{2,12}u_{1,22} - u_{1,12}u_{2,22}\right)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} u_{1,11} & -2u_{1,12} \\ u_{2,11} & -2u_{2,12} \end{vmatrix} = 2\left(u_{1,12}u_{2,11} - u_{2,12}u_{1,11}\right)$$

Для обеспечения единственности нужна доп. инф., н-р $u_i^{(2)}(P_i^{(2)})$

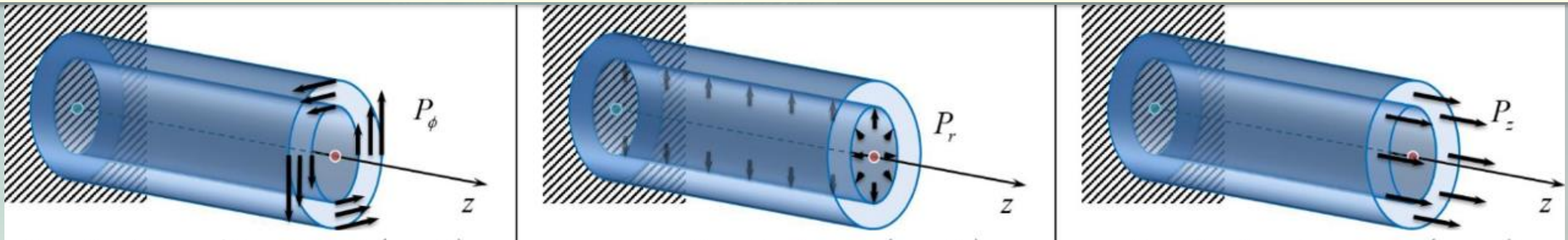
$$\Rightarrow \text{if} \quad \frac{\Delta_1\left(u^{(1)}\right)}{\Delta\left(u^{(1)}\right)} \neq \frac{\Delta_1\left(u^{(2)}\right)}{\Delta\left(u^{(2)}\right)} \quad \text{or} \quad \frac{\Delta_2\left(u^{(1)}\right)}{\Delta\left(u^{(1)}\right)} \neq \frac{\Delta_2\left(u^{(2)}\right)}{\Delta\left(u^{(2)}\right)} \qquad \text{(s3)}$$

$\Rightarrow d_{11}^0 = d_{22}^0 = d_{12}^0 = 0$ …и единственность доказана.

Замечание. Проверка этих условий требует нахождения вторых производных перемещений, что является некорректной задачей и может быть реализовано с использованием сплайн-аппроксимации.

ОЗ 1-го типа для цилиндра и оболочки

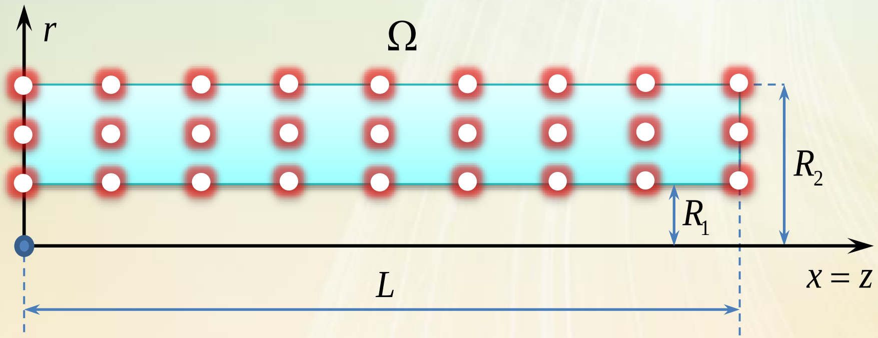
Акустическое зондирование

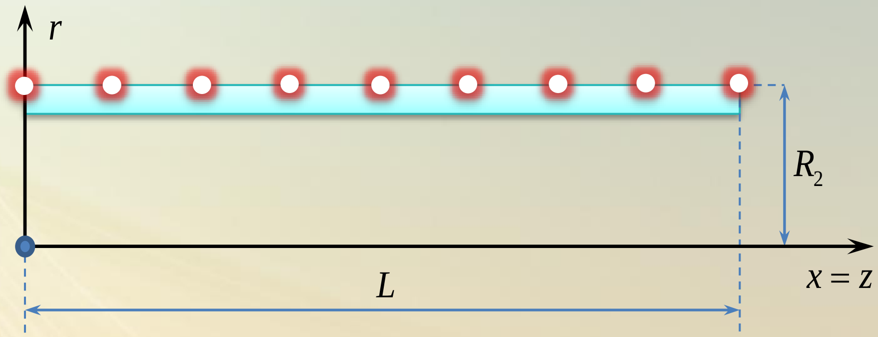


$P_r=0,\ P_\phi=\tau r/R_2,\ P_z=0\ (z=L)$ | $P_r=\tau,\ P_\phi=0,\ P_z=0\ (r=R_1)$ | $P_r=0,\ P_\phi=0,\ P_z=\tau\ (z=L)$

Дополнительная информация

Цилиндр **Оболочка**





Измерение амплитуд смещений

$\boldsymbol{\sigma}_0 - ?$

Обратная задача для цилиндра

Реконструкция

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^k, \quad k = \{I, II, ..., VII\}$$

Слабая постановка → СЛАУ

(12) $$\boxed{a_{jk}\varepsilon_k = b_j, \quad j = \overline{1,n}}$$

Метод Тихонова

$$a_{jk} = \int_\Omega \Sigma_k \left(u_r^{(j)}, u_\phi^{(j)}, u_z^{(j)}\right) d\Omega$$

$$b_j = F^u\left(u_r^{(j)}, u_\phi^{(j)}, u_z^{(j)}\right) - \int_\Omega K_{\lambda\mu}^{uu}\left(\lambda, \mu, u_r^{(j)}, u_\phi^{(j)}, u_z^{(j)}\right) d\Omega$$

$$\Sigma_k\left(u_r^{(j)}, u_\phi^{(j)}, u_z^{(j)}\right) = \tilde{\sigma}_{r\phi}^k K_{r\phi}^{uu} + \tilde{\sigma}_{rz}^k K_{rz}^{uu} ... + \tilde{\sigma}_{zz}^k K_{zz}^{uu}$$

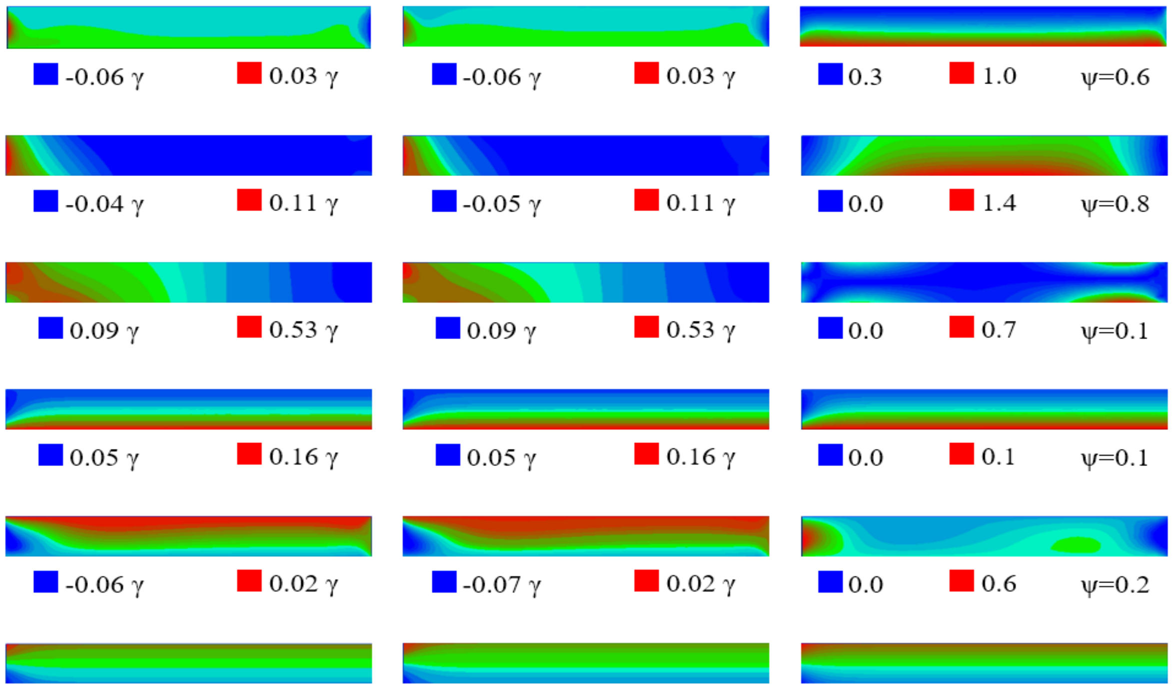
$$K_{\alpha\beta}^{uu} = K_{\alpha\beta}^{uu}\left(u_r^{(j)}, u_\phi^{(j)}, u_z^{(j)}\right)$$

Тензорный базис «эталонных» начальных состояний

$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{I}}$	*Раздувание* (равномерно-распределенная нормальная нагрузка на внутренней границе)
$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{II}}$	*Радиальное сжатие* (равномерно-распределенная нормальная сжимающая нагрузка на внешней границе)
$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{III}}$	*Осевое растяжение*
$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{IV}}$	*Скручивание* разнонаправленными касательными нагрузками на внутренней и внешней границах
$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{V}}$	*Скручивание* касательной нагрузкой на торце
$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{VI}}$	*Сдвиг* касательной нагрузкой, приложенной на внутренней границе
$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{VII}}$	*Сдвиг* касательной нагрузкой, приложенной на внешней границе

Идентификация ПН в цилиндре

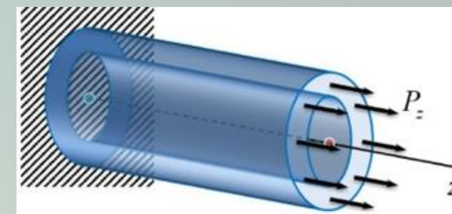
Точная функция	Реконструкция	Погрешность	Режим зондирования



ij	σ_{ij}^{0}		σ_{ij}^{0*}		κ_{ij} (%)		
rr	-0.06 γ	0.03 γ	-0.06 γ	0.03 γ	0.3	1.0	ψ=0.6
$\phi\phi$	-0.04 γ	0.11 γ	-0.05 γ	0.11 γ	0.0	1.4	ψ=0.8
zz	0.09 γ	0.53 γ	0.09 γ	0.53 γ	0.0	0.7	ψ=0.1
$r\phi$	0.05 γ	0.16 γ	0.05 γ	0.16 γ	0.0	0.1	ψ=0.1
rz	-0.06 γ	0.02 γ	-0.07 γ	0.02 γ	0.0	0.6	ψ=0.2
ϕz	0.08 γ	0.24 γ	0.08 γ	0.24 γ	0.1	0.2	ψ=0.1

ε_{I}	ε_{II}	ε_{III}	ε_{IV}	ε_{V}	ε_{VI}	ε_{VII}
0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7

осевые колебания



$$P_r = 0,\ P_\phi = 0,\ P_z = \tau\ (z = L)$$

$$f = \left\{ \begin{matrix} 800,\ 1100,\ 1400,\ 2000, \\ 2400,\ 2800,\ 3200 \end{matrix} \right\} \text{Гц}$$

$$\kappa_{ij} = \frac{\left|\sigma_{ij}^{0} - \sigma_{ij}^{0*}\right|}{\max\limits_{r,z,i,j}\left|\sigma_{ij}^{0}\right|} \cdot 100\%$$

$$\psi = \frac{1}{F}\int\limits_{\tilde{\Omega}} \frac{\left|\sigma_{ij}^{0} - \sigma_{ij}^{0*}\right|}{\max\limits_{r,z,i,j}\left|\sigma_{ij}^{0}\right|} drdz \cdot 100\%$$

Идентификация ПН в цилиндрической оболочке

Из 1-го уравнения движения:

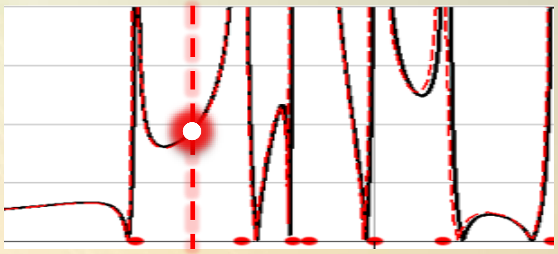
$$\hat{\sigma}_z^{0\langle 0\rangle} = -\frac{2\hat{g}\left(\nu\hat{w}+\xi_0\hat{u}'-\frac{1}{12}\varepsilon^2\xi_0^2\hat{w}''\right)+\int_1^{\xi}\left[\kappa^2\hat{\rho}\left(\frac{2}{\xi_0}\hat{u}-\frac{1}{6}\varepsilon^2\hat{w}'\right)-\hat{P}_z\right]d\zeta}{\tau\xi_0\hat{u}'}$$

Из 2-го уравнения движения:

$$\frac{1}{\xi_0}\left[\left(2\hat{g}+\tau\hat{\sigma}_\phi^{0\langle 0\rangle}\right)+\frac{1}{6}\varepsilon^2\hat{g}\right]\hat{w}-\frac{1}{6}\varepsilon^2\xi_0^2\left[\hat{g}\left(\hat{u}'-\xi_0\hat{w}''\right)\right]''+2\nu\hat{g}\hat{u}'-$$

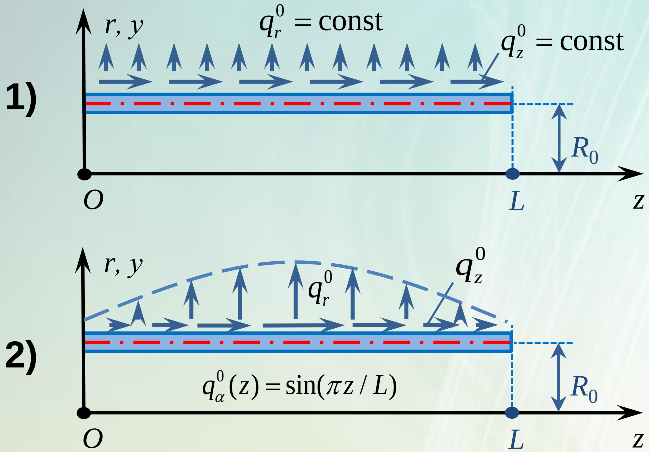
$$-\xi_0\tau\left(\hat{\sigma}_z^{0\langle 0\rangle}\hat{w}'\right)'-\frac{2\kappa^2}{\xi_0}\hat{\rho}\hat{w}-\frac{1}{6}\varepsilon^2\kappa^2\left(\hat{\rho}\left(\hat{u}-\xi_0\hat{w}'\right)\right)'+\xi_0\hat{P}_z'+\hat{P}_r=0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma}_\phi^{0\langle 0\rangle}$$

Зондирование – на **одной** частоте колебаний

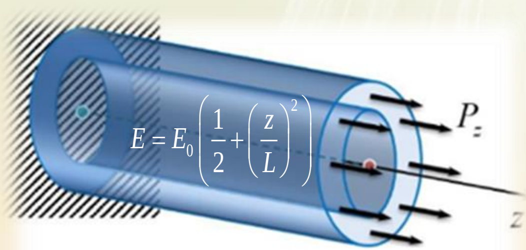


Идентификация ПН в цилиндрической оболочке

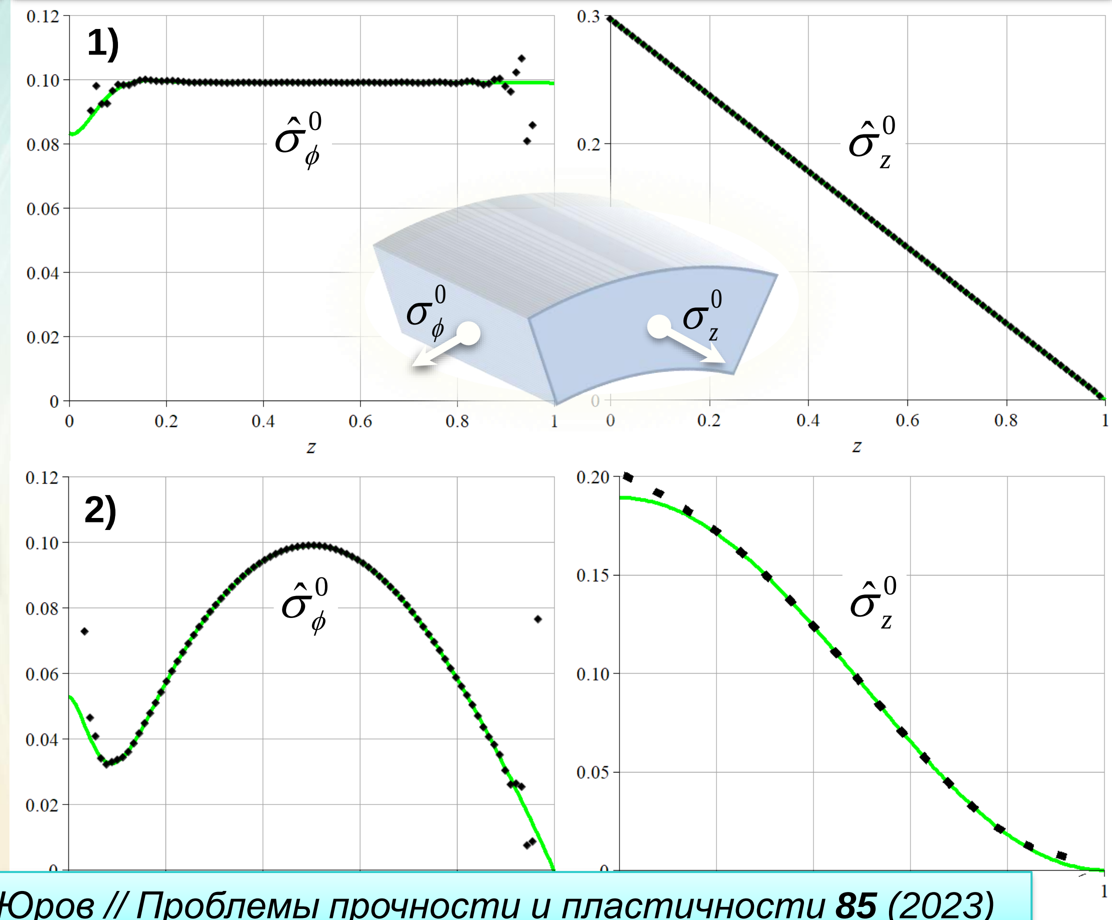
Начальное нагружение



Зондирование



Реконструкция

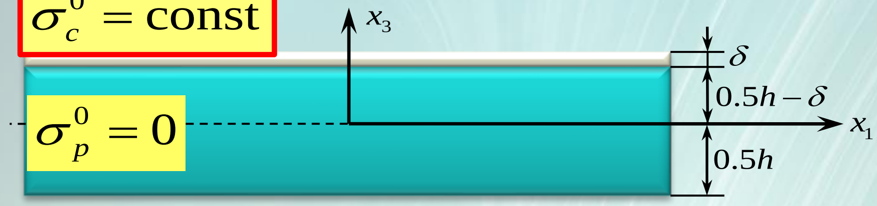


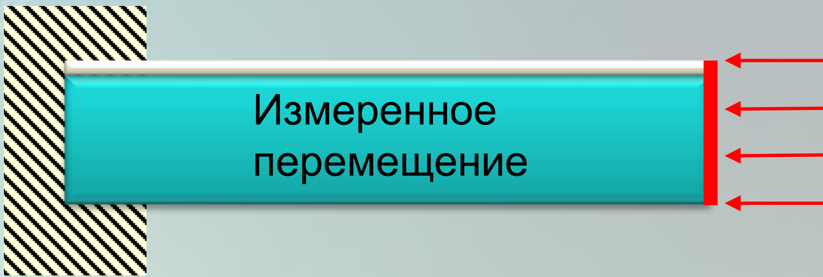
А.О. Ватульян, Р.Д. Недин, В.О. Юров // Проблемы прочности и пластичности ***85*** *(2023)*

Идентификация уровня ПН в покрытии

$\boxed{\sigma_c^0 = \mathrm{const}}$

$\sigma_p^0 = 0$





$$\Sigma_{11}^0 = -h\frac{\left[\Lambda_0\left(\zeta_{1,1}+\zeta_{2,2}\right)+2\mathrm{M}_0\zeta_{1,1}\right]_{,1}+\left[\mathrm{M}_0(\zeta_{1,2}+\zeta_{2,1})\right]_{,2}}{\zeta_{1,11}} \qquad (У4)$$

$l=0.2\,\mathrm{m},\ b=0.05\,\mathrm{m},\ h=0.003\,\mathrm{m},\ \delta=0.1h,\ \nu_p=\nu_c=0.29,$

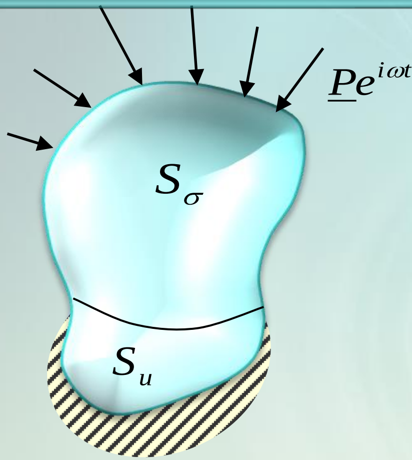
$E_p=70\,\mathrm{GPa},\ \rho_p=2500\,\mathrm{kg/m^3},\ E_c=210\,\mathrm{GPa},\ \rho_c=7700\ \mathrm{kg/m^3},\ \sigma_p^0=0.$

Prestress level $\tau=\sigma_c^0/E_p$	Exact value σ_c^0	Reconstruction $\tilde{\sigma}_c^0$	Relative error (%)
10^{-5}	21	18.7526	10.7019
10^{-4}	210	205.206	2.28266
10^{-3}	2100	2069.75	1.44051
10^{-2}	21000	20715.4	1.3552

[τ] = kg/cm2

f = 220.5 Hz

Обратная задача 2-го типа



Дополнительная информация

$$\mathbf{f}=\mathbf{u}|_{S_\sigma},\quad \omega_k\in[\omega_-,\omega_+],\quad k=\overline{1,m}$$

измеренные перемещения на S_σ

Найти

$\boldsymbol{\sigma}_0$

тензор начальных напряжений

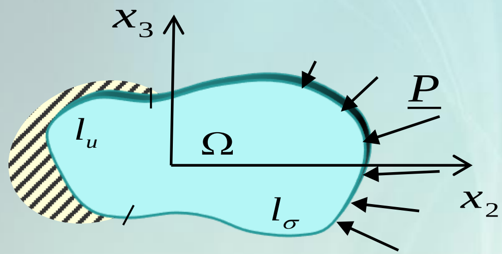
Итерационный процесс:

$$\int_V\left[\left(\boldsymbol{\sigma}_0^{(n)}\cdot\nabla\mathbf{u}^{(n-1)}\right):\nabla\mathbf{u}^{(n-1)}\right]dV+\int_{S_\sigma}\mathbf{p}\cdot\left(\mathbf{f}-\mathbf{u}^{(n-1)}\right)dS=0,\quad \omega\in[\omega_-,\omega_+] \qquad (13)$$

$\boldsymbol{\sigma}_0^{(n)}$ – поправки; $\boldsymbol{\sigma}_0^{(0)}$ – начальное приближение

*Ватульян А.О., Недин Р.Д. // Вычислительная механика сплошных сред **16**(1) (2023) 61-77*

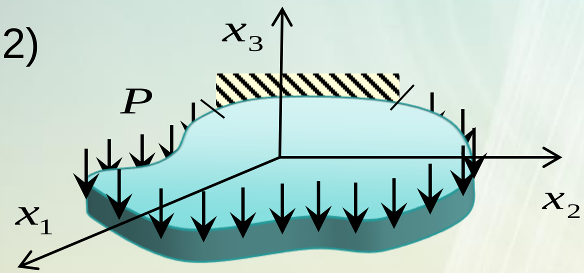
Идентификация одноосных ПН

1) 

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_{11}^0(x_2), \quad u_1 = u_1(x_1, x_2), \; u_2 = u_2(x_1, x_2), \; u_3 = 0,$$

$$\int_\Omega \sigma_{11}^{0(n)} \left[\left(u_{1,1}^{(n-1)}\right)^2 + \left(u_{2,1}^{(n-1)}\right)^2 \right] d\Omega = \int_{l_\sigma} P_i \left(u_i^{(n-1)} - f_i\right) dl_\sigma \qquad \text{(У1)}$$

---

2) 

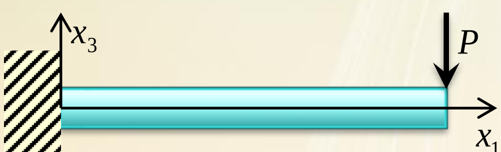
Модель Кирхгофа

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_{11}^0(x_2), \quad u_1 = -w,_1 x_3, \; u_2 = -w,_2 x_3, \; u_3 = w,$$

$$\int_\Omega \sigma_{11}^{0(n)} \left[\frac{h^3}{12} \left\{ \left(w,_{11}^{(n-1)}\right)^2 + \left(w,_{12}^{(n-1)}\right)^2 \right\} + h\left(w,_1^{(n-1)}\right) \right] d\Omega =$$

$$= \int_{l_\sigma} P\left(w^{(n-1)} - f\right) dl_\sigma \qquad \text{(У2)}$$

---

3) 

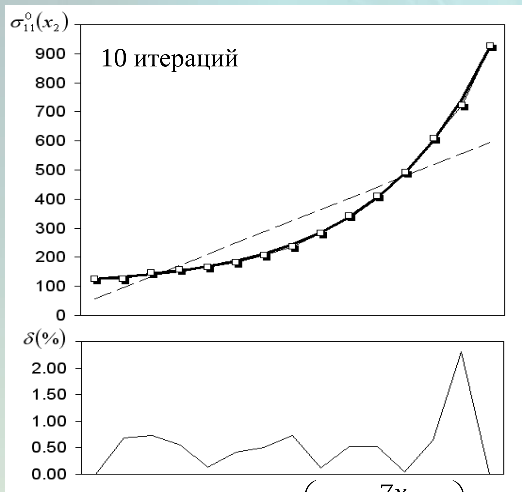
Модель Тимошенко

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_{11}^0(x_1), \quad u_1 = \theta x_3, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = w,$$

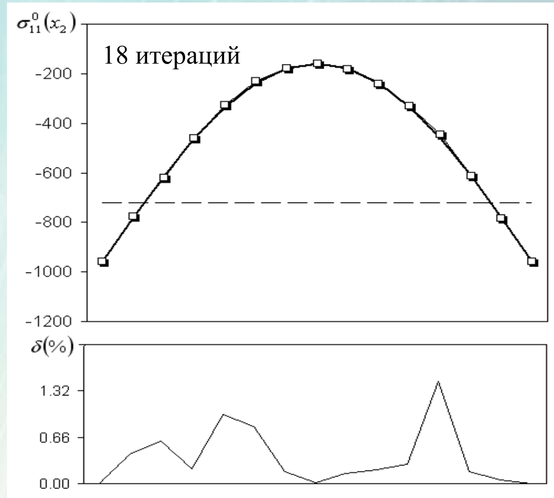
$$\int_0^l \sigma_{11}^{0(n)} \left[J(\theta^{(n-1)})'^2 + F(w^{(n-1)})'^2 \right] dx_1 = P\left[w^{(n-1)}(l) - f(l) \right]$$

$$\omega \in [\omega_-, \omega_+] \qquad \text{(У3)}$$

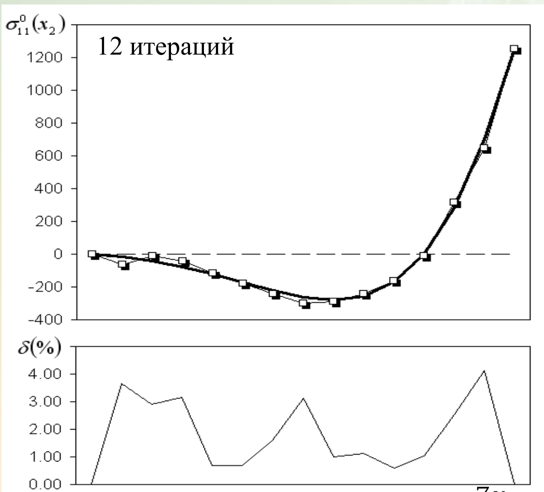
Изгибные колебания пластины. Модель Тимошенко



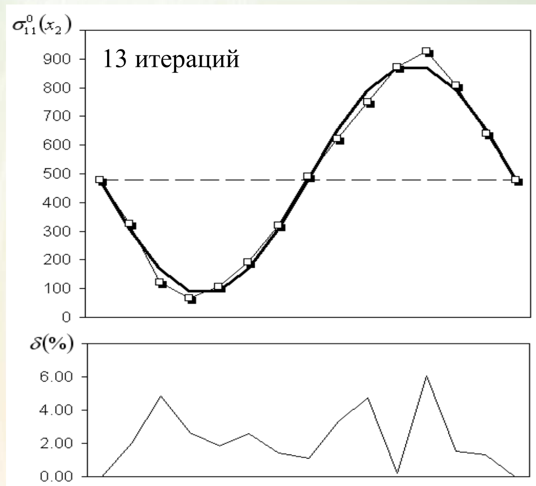
$\sigma_{11}^{0}(x_2)/E = 10^{-5}\left(1.25e^{7x_2}+5\right)$



$\sigma_{11}^{0}(x_2)/E = -4\cdot 10^{-4}(\sin 2\pi\, x_2\text{-}1.2)$



$\sigma_{11}^{0}(x_2)/E = \text{-}2.5\cdot 10^{-5}\sin(8x_2)\,e^{7x_2}$

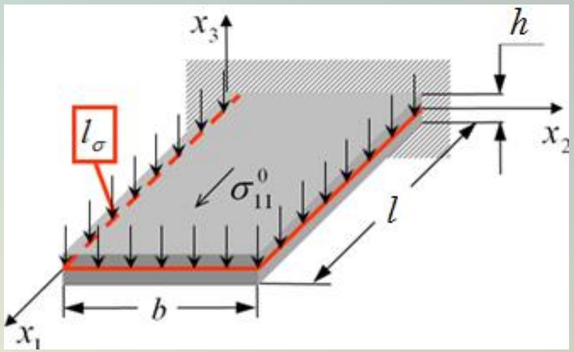


$\sigma_{11}^{0}(x_2)/E = \text{-}2\cdot 10^{-4}(\sin 4\pi x_2\text{-}1.2)$

Точный закон ПН

Начальное приближение

Идентификация на II ЧД



$l = 2$м, $b = 1$м, $h = 0.1$м,

$E = 1.96\cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.28$

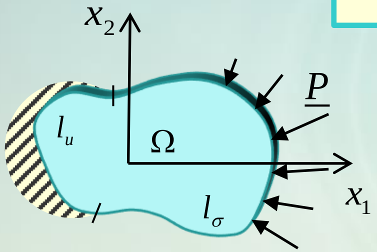
Идентификация плоского начального НДС

Неизвестные функции: $\sigma_{11}^0 = \sigma_{11}^0(x_1, x_2), \quad \sigma_{22}^0 = \sigma_{22}^0(x_1, x_2), \quad \sigma_{12}^0 = \sigma_{12}^0(x_1, x_2)$

ИУФ 1-го рода:

$$\int_\Omega \left(\sigma_{11}^{0(n)} K_{11}^{(n-1)} + \sigma_{22}^{0(n)} K_{22}^{(n-1)} + \sigma_{12}^{0(n)} K_{12}^{(n-1)} \right) d\Omega = F^{(n-1)} \qquad (16)$$

1)



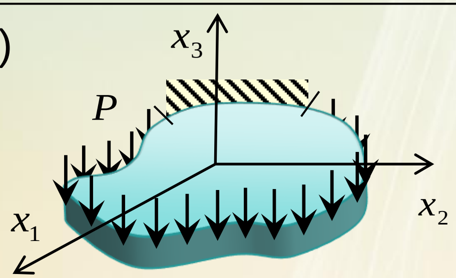
$$u_1 = -w_{,1}\, x_3, \quad u_2 = -w_{,2}\, x_3, \quad u_3 = w$$

$$K_{11} = \left[u_{1,1}^{(n-1)}\right]^2 + \left[u_{2,1}^{(n-1)}\right]^2, \qquad K_{22} = \left[u_{1,2}^{(n-1)}\right]^2 + \left[u_{2,2}^{(n-1)}\right]^2 \qquad (17)$$

$$K_{12} = 2\left[u_{1,1}^{(n-1)} u_{1,2}^{(n-1)} + u_{2,1}^{(n-1)} u_{2,2}^{(n-1)}\right], \qquad F = \int_{l_\sigma} \left[P_1(u_1^{(n-1)} - f_1) + P_2(u_2^{(n-1)} - f_2)\right] dl_\sigma$$

---

2)



$$u_1 = \theta_1 x_3, \quad u_2 = \theta_2 x_3, \quad u_3 = w$$

$$K_{11} = H\left(\left[\theta_{1,1}^{(n-1)}\right]^2 + \left[\theta_{2,1}^{(n-1)}\right]^2\right) + h\left[w_{,1}^{(n-1)}\right]^2,$$

$$K_{22} = H\left(\left[\theta_{1,2}^{(n-1)}\right]^2 + \left[\theta_{2,2}^{(n-1)}\right]^2\right) + h\left[w_{,2}^{(n)}\right]^2, \qquad (18)$$

$$K_{12} = 2\left[H(\theta_{1,1}^{(n-1)} \theta_{1,2}^{(n-1)} + \theta_{2,1}^{(n-1)} \theta_{2,2}^{(n-1)}) + h w_{,1}^{(n-1)}\, w_{,2}^{(n-1)}\right], \qquad F = -\int_{l_\sigma} P(w^{(n-1)} - f)\, dl_\sigma$$

Сведение к СЛАУ на текущей итерации

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{0(n)} = \delta\Phi,_{22}^{(n)} \\ \sigma_{22}^{0(n)} = \delta\Phi,_{11}^{(n)} \\ \sigma_{12}^{0(n)} = -\delta\Phi,_{12}^{(n)} \end{cases} \Rightarrow \quad \int_S \left(\delta\Phi,_{22}^{(n)} K_{11}^{(n-1)} - \delta\Phi,_{12}^{(n)} K_{12}^{(n-1)} + \delta\Phi,_{11}^{(n)} K_{22}^{(n-1)} \right) dS = F^{(n-1)}(\omega), \quad \omega \in [\omega_-, \omega_+] \qquad (19)$$

$$F^{(n-1)}(\omega) = \int_{l_\sigma} \left[P_1 (u_1^{(n-1)} - f_1) + P_2 (u_2^{(n-1)} - f_2) \right] dl_\sigma$$

$\delta\Phi^{(n)}$ – поправка к искомой функции напряжений (Эри) на *n*-ой итерации

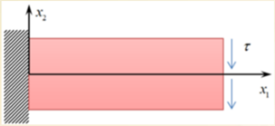
$$\delta\Phi^{(n)} = \sum_{k=1}^{N} a_k^{(n)} \varphi_k$$

φ_k – базисные функции $\quad a_k$ – искомые к-ты разложения

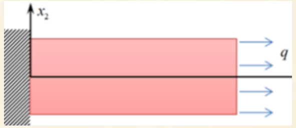
Полином. разложение: $\delta\Phi^{(n)} = \sum_{k,l=0}^{N} a_{k,l}^{(n)} x_1^k x_2^l \;\Rightarrow\; \sum_{k,l=0}^{N} a_{k,l}^{(n)} A_{k,l}^{(n-1)} = F^{(n-1)}$

$$A_{k,l}^{(n-1)} = \int_S \left(l(l-1) x_1^k x_2^{l-2} K_{11}^{(n-1)} - kl x_1^{k-1} x_2^{l-1} K_{12}^{(n-1)} + k(k-1) x_1^{k-2} x_2^l K_{22}^{(n-1)} \right) dS \qquad (20)$$

Серия из m эксп. по частотному зондированию

1) 

$\omega_k, \quad k = \overline{1, m_1}$

2) 

3) ….

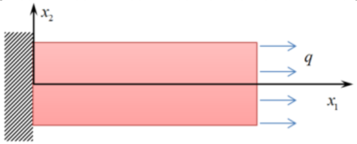
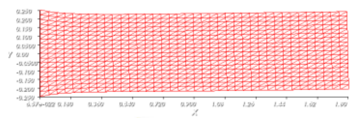
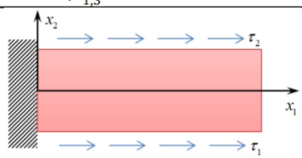
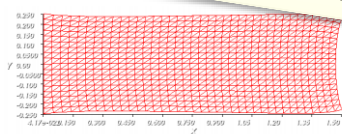
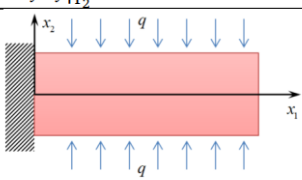
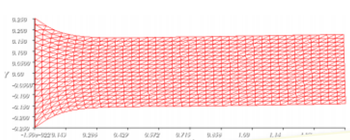
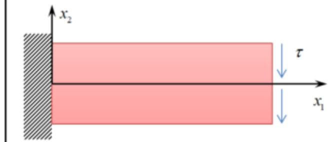
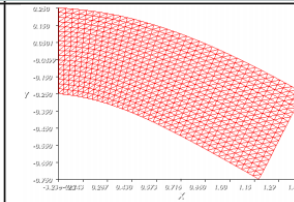
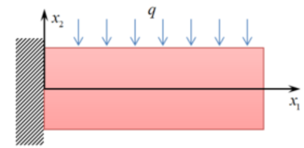
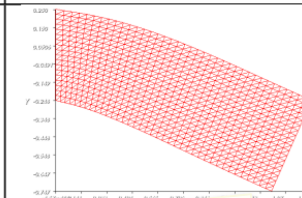
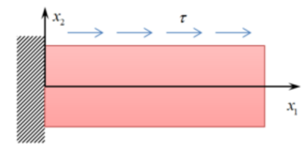
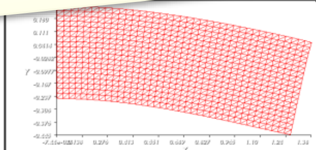
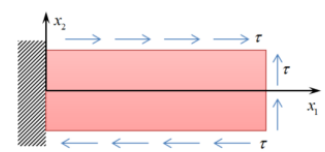
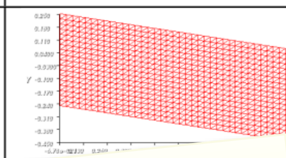
$\omega_k, \quad k = \overline{m_1 + 1, m_2}$

$$\begin{cases} a_{2,0}^{(n)} \left[A_{2,0}^{(n\text{-}1)} \right]_1 + a_{1,1}^{(n)} \left[A_{2,0}^{(n\text{-}1)} \right]_1 + a_{0,2}^{(n)} \left[A_{2,0}^{(n\text{-}1)} \right]_1 + \ldots = \left[F^{(n\text{-}1)} \right]_1 \\ a_{2,0}^{(n)} \left[A_{2,0}^{(n\text{-}1)} \right]_2 + a_{1,1}^{(n)} \left[A_{2,0}^{(n\text{-}1)} \right]_2 + a_{0,2}^{(n)} \left[A^{(n\text{-}1)} \ldots \right]_2 \\ \ldots \\ a_{2,0}^{(n)} \left[A_{2,0}^{(n\text{-}1)} \ldots \right]_m \ldots \left[A_{2,0} \right]_m + a_{0,2}^{(n)} \left[A_{2,0}^{(n\text{-}1)} \right]_m + \ldots = \left[F^{(n\text{-}1)} \right]_m \end{cases} \qquad (21)$$

Метод регуляризации А.Н. Тихонова

Анализ чувствительности

Какие зондирующие нагрузки наиболее эффективны для реконструкции начальных напряжений?

#	Loading type and natural boundary conditions	Region deformation (FEM)
1	 $T_{11}\|_{\Gamma_2}=q,\ T_{21}\|_{\Gamma_2}=0$ $T_{ij}n_j\|_{\Gamma_{1,3}}=0,\ i,j=1,2$	
2	 $T_{12}\|_{\Gamma_{1,3}}=\pm\tau,\ T_{22}\|_{\Gamma_{1,3}}=0$ $(\tau_1=\tau_2=\tau)$ $T_{ij}n_j\|_{\Gamma_2}=0,\ i,j=1,2$	
3	 $T_{12}\|_{\Gamma_{1,3}}=0,\ T_{22}\|_{\Gamma_{1,3}}=-q$ $T_{ij}n_j\|_{\Gamma_2}=0,\ i,j=1,2$	
4	 $T_{11}\|_{\Gamma_2}=0,\ T_{21}\|_{\Gamma_2}=-\tau$ $T_{ij}n_j\|_{\Gamma_{1,3}}=0,\ i,j=1,2$	
5	 $T_{12}\|_{\Gamma_3}=0,\ T_{22}\|_{\Gamma_3}=-q$ $T_{ij}n_j\|_{\Gamma_{1,2}}=0,\ i,j=1,2$	
6	 $T_{12}\|_{\Gamma_3}=\tau,\ T_{22}\|_{\Gamma_3}=0$ $T_{ij}n_j\|_{\Gamma_{1,2}}=0,\ i,j=1,2$	
7	 $T_{12}\|_{\Gamma_{1,3}}=\tau,\ T_{21}\|_{\Gamma_2}=\tau$ other components $T_{ij}\|_{\Gamma_{1,2,3}}=0$	

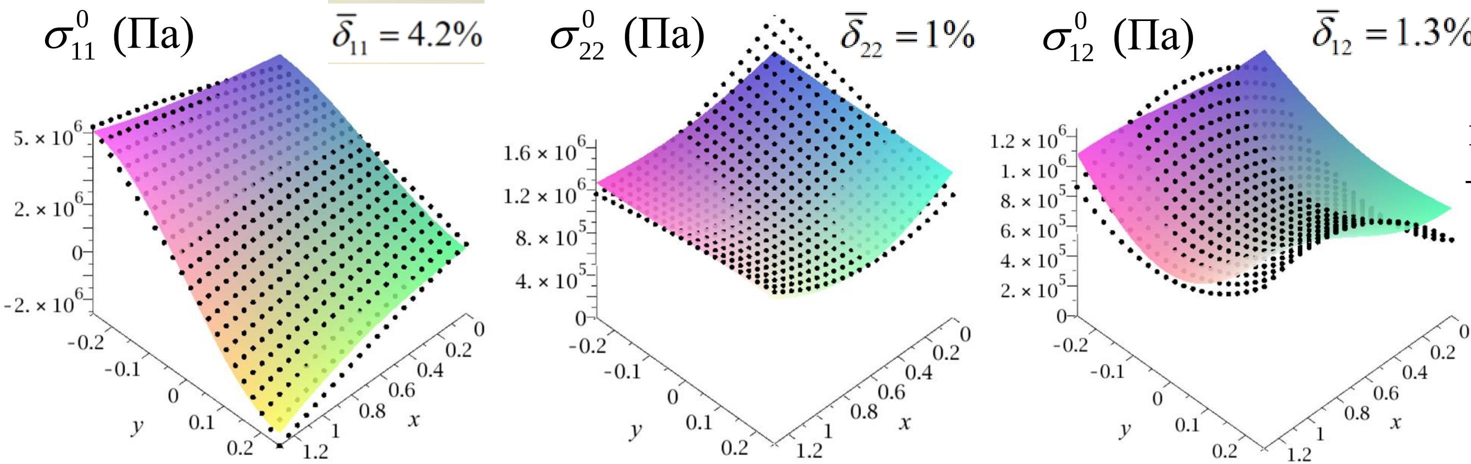
Зондирование растяжением

Зондирование сжатием

Зондирование изгибом

Зондирование сдвигом

Реконструкция плоского начального НДС



$$\frac{\max\limits_{x,y}\left|\tilde{\sigma}_{\gamma\beta}^0\right|}{E} = 10^{-6} \div 10^{-4}$$

$$E = 1.98 \cdot 10^{11}\ \text{Па}$$

8 итераций

Истинные напряжения $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^0$ Реконструкция $\sigma_{\alpha\beta}^0$

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{11}^0 &= 10^5(14.7 + 1.47\sin 2.3x_1 \exp 2x_2 - 13.2\sin 6x_2 \exp 0.77x_1)\\
\tilde{\sigma}_{22}^0 &= 10^5(13.5 - 1.95\sin 2.3x_1 \exp 2x_2 - 0.22\sin 6x_2 \exp 0.77x_1)\\
\tilde{\sigma}_{12}^0 &= 10^5(10 - 1.7\cos 2.3x_1 \exp 2x_2 - 1.7\cos 6x_2 \exp 0.77x_1)
\end{aligned}\right\}$$

точные законы восстанавливаемых функций напряжений

4 частоты зондирования: $\omega_1 = 230$ Гц, $\omega_2 = 1020$ Гц, $\omega_3 = 2020$ Гц, $\omega_4 = 2060$ Гц

Заключение

- На основе линеаризованной модели о колебаниях предварительно напряженного (ПН) тела представлена общая постановка краевой задачи и ее вариационная формулировка.
- Рассмотрены постановки *обратных коэффициентных задач* об идентификации полей ПН при наличии дополнительной информации об измеренных амплитудах перемещений в некотором частотном диапазоне.
- Изучены некоторые обратные задачи о реконструкции ПН различных типов в *пластинах и цилиндрах*, проведены и проанализированы вычислительные эксперименты.

Спасибо за внимание!